e) $x+1 = x'$

$x+1 = (x\wedge 1')\vee(x'\wedge 1) = (x\wedge 0)\vee(x'\wedge 1) = 0\vee x' = x'$

ملاحظة:

$x+x' = 1$:

$x+x' = x + x + 1 = 0 + 1 = 1$

بناء الحلقة :

مبرهنة :

كل شبكة بول تكون حلقة تبديلية وواحدية من أجل العمليتين :

- $x+y$ المعرفة سابقاً
- $x.y = x\wedge y$

زد على ذلك فإنه في هذه الحلقة الضرب يكون جامداً أي أنه من أجل أي x فإن $x^2 = x$

البرهان :

لتكن E شبكة بول حسب ما رأينا سابقاً فإن $(E,+)$ تكون زمرة تبديلية ولنعرف الضرب بالشكل التالي $x.y = x\wedge y$ نكتب اختصاراً xy هذه العملية تكون تبديلية تجميعية وتحقق الخاصة الجامعية و 1 عنصر حيادي كما أن الضرب توزيعي مع الجمع

$(x+y)z = [(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)]\wedge z = [(x\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z)]$

$xz+yz = (x\wedge z)+(y\wedge z) = [(x\wedge z)\wedge(y\wedge z)']\vee[(x\wedge z)'\wedge(y\wedge z)]$

$= [(x\wedge z)\wedge(y'\vee z')]\vee[(x'\vee z')\wedge(y\wedge z)]$

$= (x\wedge z\wedge y')\vee(x\wedge z\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z)\vee(\underbrace{z'\wedge y\wedge z}_{=0})$

$= (x\wedge z\wedge y')\vee(x'\wedge y\wedge z)$

ومنه نستنتج أن $(x+y)z = xz+yz$ وبالتالي فإن $(E,+,.)$ تبديلية واحدية

الحلقات البوليانية

تعريف :

ندعو الحلقة الواحدية حيث الضرب فيها جامد (أي $x^2=x$) حلقة بول

نتائج:

كل عنصر يكون نظير نفسه

$$(x+x)^2 = x+x \Rightarrow (x+x)(x+x) = x+x$$

$$\Rightarrow (x+x)x + (x+x)x = x+x$$

$$\Rightarrow x^2+x^2+x^2+x^2 = x+x$$

$$\Rightarrow x+x+\underbrace{x+x}_{\text{اختصار}} = x+x \Rightarrow x+x=0$$

الضرب تبديلي

$$(x+y)^2 = x+y \Rightarrow (x+y)(x+y) = x+y$$

$$\Rightarrow (x+y)x + (x+y)y = x+y$$

$$\Rightarrow x^2+yx+xy+y^2 = x+y$$

$$\Rightarrow x+yx+xy+y = x+y$$

$$\Rightarrow x+y+\underline{yx+xy} = x+y \Rightarrow yx+xy=0 \Rightarrow yx=xy$$

بناء شبكة بول:

مبرهنة

كل حلقة بوليانية تكون شبكة حيث أن العمليتين الداخليتين

$$x \wedge y = x \cdot y$$

$$x \vee y = x+y+xy$$

البرهان

العملية $\wedge$ تبديلية تجميعية وتحقق الخاصية الجامدية

العملية $\vee$

تبديلية :

$$y \vee x = y+x+xy = y+x+xy = x \vee y$$

تجميعية

$$(x \vee y) \vee z = (x \vee y) + z + (x \vee y) z$$
$$= x + y + xy + z + (x + y + xy) z$$
$$= x + y + xy + z + xz + yz + xyz$$

$$x \vee (y \vee z) = x + (y \vee z) + x(y \vee z) = x + y + z + yz + x(y + z + yz)$$
$$= x + y + yz + xy + xz + xyz$$

نستنتج أن $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

الجمعية

$$x \vee x = x + x + x^2 = \underbrace{x + x}_{} + x = 0 + x = x$$

قانون الامتصاص

$$x \wedge (x \vee y) = x(x \vee y) = x(x + y + xy) = x^2 + xy + x^2 y = x + \underbrace{xy + xy}_{=0}$$
$$= x + 0 = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = x + (x \wedge y) + x(x \wedge y) = x + xy + x^2 y = x + \underbrace{xy + xy}_{=0}$$
$$= x + 0 = x$$

توزيع $\wedge$ على $\vee$

$$x \wedge (y \vee z) = x(y + z + yz) = xy + xz + xyz$$
$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = xy \vee xz = xy + xz + x^2 yz = xy + xz + xyz$$

أي أن

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

المتمم:

نفرض أن $x' = x + 1$

$$x \wedge x' = x x' = x(x+1) = x^2 + x = x + x = 0$$
$$x \vee x' = x + x' + x x' = x + (x+1) + x(x+1)$$
$$= x + x + 1 + x^2 + x$$
$$= \underbrace{x + x}_{=0} + 1 + \underbrace{x + x}_{=0} = 0 + 1 + 0 = 1$$

العنصر الأكبر والعنصر الأصغر .

$x \wedge 0 = x.0 = 0 \Rightarrow 0 \leq x$

$x \wedge 1 = x.1 = x \Rightarrow x \leq 1$

ومنه نستنتج أن الحلقة البوليانية هي شبكة بول

الشبكة والحلقات الموافقة

لتكن E شبكة بول لنرفق بها الحلقة البوليانية والتي سنرمز لها بـ $R(E)$ وذلك بتعريف العمليتين

$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$.

. $x . y = x \wedge y$

لتكن B حلقة بوليانية لنرفق بها الشبكة البوليانية والتي سنرمز لها $L(B)$ وذلك بتعريف العمليتين .

$x \wedge y = x.y$.

$x \vee y = x + y + xy$

مبرهنة :

$L(R(E)) = E$

البرهان :

لنرمز بـ $\dot{\wedge}$, $\dot{\vee}$ للعمليتين في $L(R(E))$

$x \dot{\wedge} y = x.y = x \wedge y$.

$x \dot{\vee} y = x + y + xy = x \vee y$

وبالتالي نستنتج أن علاقة الترتيب هي نفسها في E و $L(R(E))$ وبالتالي فهي نفس الشبكة

مبرهنة :

$R(L(B)) = B$

البرهان :

لنرمز بـ $\dot{+}$, $\dot{\times}$ للعمليتين في $R(L(B))$

$x \times y = x \wedge y = x \cdot y$

$x \dotplus y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = [x(y+1)] \vee [(x+1)y]$

$= (xy + x) \vee (xy + y)$

$= (xy + x) + (xy + y) + (xy + x)(xy + y)$

$= xy + x + xy + y + x^2y^2 + xy^2 + x^2y + xy$

$= \underbrace{xy + xy}_{=0} + x + y + \underbrace{xy + xy}_{=0} + \underbrace{xy + xy}_{=0} = x + y$

نتيجة :

يمكن أن نعرف على المجموعة E على الشكل مايأتي

- بناء شبكة بول $(E, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, ')$

- بناء حلقة بول $(E, +, \cdot, 0, 1)$

عندما نقول جبر بول نقصد المجموعة المعرفة على البنائين السابقين

$(E, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, ', +, \cdot)$

حيث أنه يمكن الانتقال من أحد البنائين إلى الآخر من العلاقات

$$\left\{\begin{array}{l} x \wedge y = xy \\ x \vee y = x + y + xy \\ x' = x + 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x \cdot y = x \wedge y \\ x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \\ \quad = (x \vee y) \wedge (x' \vee y') \end{array}\right.$$

ملاحظات :

نفرض $(E, \leq, \wedge, \vee, ', 0, 1, +, \cdot)$ جبر بول

1) علاقة الترتيب $x \leq y$ يمكن التعبير عنها بأشكال مختلفة ومتكافئة

- بالشكل $xy = x$ (ويمكن استنتاج $x \wedge y = x$)

- بالشكل $x \vee y = y$

- $x' \vee y = 1$ وذلك لأن

$x' \vee y = x' + y + x'y = (x+1) + y + (x+1)y$

$= x + 1 + y + xy + y$

$= x \vee y + y + 1$

$= \underbrace{y + y}_{=0} + 1 = 1$

بالمثل $x y' = 0$ وذلك لأن

$x y' = (x \wedge y')' = (x' \vee y)' = 1' = 0$

2) من المعروف أن علاقة الترتيب متوافقة مع العمليتين ∧, ∨ وذلك لأن

$x \leq y \Rightarrow x z \leq y z$ و $x \vee z \leq y \vee z$ $\forall z \in E$

ولكن عملية الترتيب هذه غير متوافقة مع الجمع: مثلاً:

$0 \leq 1 \Rightarrow 0+1 \not\leq 1+1$ (لا نجمع تكميلاً)

(3) $y' \leq x'$ فإن $x \leq y$ وذلك لأن

$x \leq y \Leftrightarrow xy = x \Leftrightarrow (xy)' = x' \Leftrightarrow x' \vee y' = x'$

$\Leftrightarrow y' \leq x'$

أمثلة عن الحلقات البوليانية:

1) $P(E)$ حلقة بوليانية وذلك من أجل أي مجموعة كانت

2) $U = \{0, 1\}$ حلقة بوليانية وهي حالة خاصة من المثال السابق وذلك بأخذ مجموعة وحيدة العنصر

حلقة قواسم عدد: من أجل أي عدد طبيعي $n \in N^+$ مجموعة القواسم لـ n بالمجموعة $D(n)$ إن $D(n)$ هي شبكة جزئية من $(N^+, |)$ وهي أيضاً شبكة تعريفية وتحوي العنصر الأكبر n والعنصر الأصغر 1

لنبحث عن الشرط الذي يجعل هذه الشبكة متممة:

نفرض $x \in D(n)$ ولنفرض أنه يوجد متمم لـ x وليكن $x' \in D(n)$ عندئذ يكون

القاسم المشترك الأكبر $x \wedge x' = 1 \Leftrightarrow \gcd(x, x') = 1$

المضاعف المشترك البسيط $x \vee x' = n \Leftrightarrow \operatorname{lcm}(x, x') = n$

الشرط الأول يعني أن x', x أوليين فيما بينهما وفي هذه الحالة يكون الشرط الثاني $x x' = n$ (هنا يعني x' هو المتمم العادي)

فالشرط اللازم والكافي كي تكون $D(n)$ متممة هو من أجل أي عنصر $x \in D(n)$ يكون x, $\frac{n}{x}$ أوليين فيما بينهما

بفرض أن x , $\frac{n}{x}$ ليسا أوليين فيما بينهما عندئذٍ يوجد قاسم مشترك أولي بينهما مثل p

ولكن $x = pa$ ، $\frac{n}{x} = pb$ ومنه $n = pb \cdot x = p^2 ba$

وبالتالي n يقبل القسمة على مربع عدد أولي

العكس:

إذا كانت n تقبل القسمة على مربع عدد أولي p يكون $n = kp^2$ عندئذٍ يكون $x = p$

$\frac{n}{x} = kp$ لا يكونا أوليين فيما بينهما وبالتالي تنتج المبرهنة التالية

مبرهنة:

الشبكة $D(n)$ المرتبة بعلاقة القسمة تكون شبكة بول إذا وفقط إذا كانت n لا تقبل القسمة على مربع عدد أولي وهذا يعني أن $n = p_1 p_2 \dots p_s$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة وتكون $D(n)$ جبر بول مع العمليات

$$x \cdot y = \gcd(x,y) \qquad x \vee y = \operatorname{lcm}(x,y) \qquad x' = \frac{n}{x}$$

$$x + y = \gcd(\operatorname{lcm}(x,y), \operatorname{lcm}(x',y'))$$

أمثلة:

نعرض ثلاثة حلقات بوليانية $D(2)$ والتي هي إيزومورفية مع $\mathbb{Z}_2$ ، $D(6)$ ، $D(30)$

2, 1 — $D(2)$

6, 2, 3, 1 — $D(6)$

30, 10, 6, 15, 2, 5, 1 — $D(30)$

لنحسب مثلاً في $D(30)$

$$5 + 2 = \gcd\left(\operatorname{lcm}(5,2), \operatorname{lcm}\left(\frac{30}{5}, \frac{30}{2}\right)\right)$$
$$= \gcd(10, 30) = 10$$

$$6 \cdot 2 = \gcd(6,2) = 2$$

حلقة الجويات المفتوحة والمغلقة بآن واحد clopen في فضاء طبولوجي:

في فضاء طبولوجي X نعد clopen كل مجموعة جزئية من X والتي تكون بنفس الوقت مفتوحة ومغلقة. كل فضاء طبولوجي يحوي على الأقل مجموعتين مفتوحتين ومغلقتين بنفس الوقت X و ϕ وإذا كانت الفضاء مترابطة تكونا الوحيدتان

لتكن $\mathcal{Z}$ أسرة من الجويات المفتوحة والمغلقة بآن واحد من X فإن $\mathcal{Z}$ تكون شبكة جزئية من $P(E)$ لأنه إذا كانت $A, B \in \mathcal{Z}$ فإن كلاً من $A \cap B$ و $A \cup B$ ينتمي إلى $\mathcal{Z}$ كما أن $\mathcal{Z}$ شبكة تعزيزية على العنصر الأكبر X والعنصر الأصغر ϕ بالإضافة إلى فإن A^c ينتمي إلى $\mathcal{Z}$ ومنه فإن $\mathcal{Z}$ تكون جبر بول من أجل العمليات المعروفة. وسنرى أهمية في الفصل الثاني المتعلق بالثنوية كمثال بديهي عن هذا الفضاء الطبولوجية المنفصلة يكون عندئذ $\mathcal{Z} = P$

الحلقات البوليانية الجزئية:

تعريف:

ليكن A جبر بول عندئذ ندعو حلقة بول الجزئية أو جبر بول الجزئي من A كل حلقة جزئية واحدية في A. أي أنه حلقة بول الجزئية B الحاوية العنصر الحيادي 1 ومغلقة بالنسبة $x \cdot y$, $x + y$

ومنه نستنتج أن B مغلقة بالنسبة للعمليتين $x \vee y$ و x' وتحوي 0 أي أن B تكون جبر بول من أجل المبادئ الجبرية

وحسب الملاحظات عن العمليات في الفقرة السابقة يمكننا أن نستنتج المبرهنة التالية

مبرهنة:

المقترحات الثلاثة التالية متكافئة

a) B حلقة بوليانية جزئية من A

b) B هي مجموعة جزئية غير خالية من A ومغلقة بالنسبة للعمليتين xy و x'

c) B هي مجموعة جزئية غير خالية من A ومغلقة بالنسبة للعمليتين $x \vee y$ و x'

ملاحظات:

الحلقة البوليانية الجزئية B من A والمزودة بالترتيب المحدد تكون شبكة جزئية من A ولكن ليس كل شبكة جزئية من A تكون بالضرورة حلقة بوليانية جزئية

أمثلة:

① لتكن E مجموعة غير منتهية إن أسرة المجموعات الجزئية المنتهية من E تكون شبكة جزئية من $P(E)$ ولكنها ليست حلقة بوليانية جزئية (برغم أن $P(E)$ حلقة بوليانية) لأنها لاتحوي العنصر المحايد E من أجل الترتيب المولد تكون هذه الشبكة توزيعية ولكنها ليست متممة (لأنها لاتحوي العنصر الأكبر)

② تكون D(6) شبكة جزئية من D(30) ولكنها ليست شبكة بوليانية جزئية من D(30) ذلك لأنها لاتحوي العنصر المحايد 30 بالرغم من أن الترتيب المعلوم D(6) تكون شبكة بول ولكن حيث 6 هو العنصر المحايد)

بالمثل فإن {1, 2, 15, 30} الجزئية بعلاقة تقسيم هي حلقة بوليانية جزئية من D(30) (لأنها تحوي المحايدين ولأنها مغلقة بالنسبة لـ ٨,٧)

ملاحظة:

أي حلقة بوليانية A تحوي على أقل حلقتين بوليانيتين جزئيتين هما A, {0,1}

③ تقاطع أي أسرة $\{B_i\}_{i\in I}$ من الحلقات البوليانية الجزئية من A يكون حلقة بوليانية جزئية من A

أمثلة:

① الأسرة $F(E)$ من المجموعات المنتهية أو ذات المتممات المنتهية من المجموعة E تكون حلقة بوليانية جزئية من $P(E)$

② الأسرة $\mathcal{C}$ من المجموعات المفتوحة والمغلقة بآن واحد في فضاء طبولوجي X تكون حلقة بوليانية جزئية من $P(X)$

بينما الأسرة τ من المجموعات المفتوحة في X تكون شبكة جزئية من $P(X)$ ولكنها في الحالة العامة لاتكون شبكة بوليانية جزئية من $P(X)$ وذلك لأنها ليست مغلقة بالنسبة للمتمم (أي أنها ليست متممة)

انتهت المحاضرة :